

Skript

Matrizenrechnung

von
Georg Sahliger

Mainz, den 3.1.2024

Inhaltsverzeichnis

0	Einführung	2
1.	Definition	2
2.	Rechnen mit Matrizen	2
2.1	Matrizenaddition / Matrizenabstraktion	3
2.2	Skalarmultiplikation:	3
2.3	Multiplikation zweier Matrizen	4
2.4	Matrizengleichungen	5
3.	Anwendung der Matrizenrechnung	7
3.1	Einstufige Prozessen mit Matrizenrechnung	7
3.2.	Zweistufige Prozesse mit Matrizenrechnung	11
4.	Inverse Matrizen	15
5.	Umkehrung der Prozesse	21
6.	Stochastische Prozesse	22
7.	Populationsentwicklung – Zyklische Prozesse	26
7.	Literatur	29

0 Einführung

Bisher kennen wir Matrizen als eine übersichtlichere Schreibweise von Gleichungssystemen. In diesem Skript sollen Matrizen als ein mathematisches Objekt beschrieben und untersucht werden. Hierzu führen wir Matrizen noch einmal neu ein und definieren diese. Anschließend untersuchen wir welche Rechenmöglichkeiten man für Matrizen definieren kann und welche sich hierbei als sinnvoll erweisen. Im zweiten Teil beschäftigen wir uns mit den Anwendungsmöglichkeiten von Matrizen, wie sie z.B. im Fach BWL gelehrt werden.

1. Definition

Definition 1: Eine Matrix A mit m Zeilen und n Spalten heißt **$m \times n$ -Matrix**.

(Sprich m kreuz n Matrix)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Jedes Element ist durch die Bezeichnung eindeutig festgelegt. Merke: „Zeilen zuerst, Spalten später!“

a_{34} ist das Element in der 3. Zeile und 4. Spalte.

Matrizen mit nur einer Spalte, z.B. $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ \dots \\ -2 \end{pmatrix}$ nennt man “Spaltenvektor”.

Aufgabe: Gib ein Beispiel für eine 3×2 – Matrix an:

Gemäß unserem Merkspruch „Zeilen zuerst, Spalten später“ brauchen wir also eine Matrix mit

3 Zeilen und 2 Spalten. Beispiel: $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

2. Rechnen mit Matrizen

2.1 Matrizenaddition / Matrizensubtraktion

Matrizen addiert / subtrahiert man elementweise.

-Addition mit Matrizen

$$C = A + B =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Subtraktion der Matrizen A und B

$$C = A - B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} \end{pmatrix}$$

Es gilt das Kommutativgesetz: $A + B = B + A$ und das

Assoziativgesetz: $(A+B) + C = A+(B+C)$

Beispiele:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3 & 3+4 \\ 2+5 & 4+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 8 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 & -6 \\ 6 & 0 & -4 \\ 8 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2 & 2+2 & -2-6 \\ 0+6 & 0+0 & 8-4 \\ 4+8 & 4+1 & 1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -8 \\ 6 & 0 & 4 \\ 12 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

Klar: Man kann nur Matrizen mit gleicher Dimension, also gleicher Zeilen- und gleicher Spaltenanzahl addieren / subtrahieren.

2.2 Skalarmultiplikation:

Man multipliziert eine Matrix mit einer Zahl (Skalar) folgendermaßen:

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$$

2.3 Multiplikation zweier Matrizen

Multiplikation einer Matrix mit einem Spaltenvektor.

Eine n-spaltige Matrix A multipliziert man von rechts mit einem Spaltenvektor mit n Elementen nach folgender Regel:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 & a_{12}x_2 & \dots & a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 & a_{22}x_2 & \dots & a_{2n}x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 & a_{m2}x_2 & \dots & a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

Klar. Damit man eine Matrix mit einem Spaltenvektor multiplizieren kann, muss die Matrix so viele Spalten wie der Vektor Zeilen haben.

Multiplikation zweier Matrizen

Wir multiplizieren Matrizen folgendermaßen

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot (-2) + 4 \cdot 5 & 3 \cdot (-4) + 4 \cdot 2 \\ 5 \cdot (-2) + 6 \cdot 5 & 5 \cdot (-4) + 6 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -4 \\ 20 & -8 \end{pmatrix}$$

Wir multiplizieren die Zeilen der ersten Matrix mit der Spalte der zweiten Matrix, indem wir die einzelnen Einträge addieren. an dieser Stelle möchte ich auf die zahlreichen Erklärfilme im Internet verweisen, die das schrittweise und ausführlich erklären.

Beispiele:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 4 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 15 \\ 2 & 4 \\ 7 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 15 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 7 & 15 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{e) } (1 \quad 4 \quad 0 \quad 1) \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = (3)$$

$$f) \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$g) \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}$$

$$h) \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 8 \\ 9 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Man kann zwei Matrizen nur dann multiplizieren, wenn die Anzahl der Spalten der ersten Matrix gleich der Anzahl der Zeilen der zweiten Matrix gleich ist.

Rechengesetze für die Multiplikation

Rechengesetze für das Multiplizieren von Matrizen

Für Matrizen A,B,C gilt stets

$(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$, (Assoziativgesetz)

$(A + B) \times C = (A \times C) + (B \times C)$, (Distributivgesetz)

$A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C)$, (Distributivgesetz)

$(r \times A) (s \times B) = rs \times (A \times B)$, wobei $r, s \in \mathbb{R}$, falls die Matrizenterme definiert sind.

Beispiel Distributivgesetz:

$$\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) \times \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 5 & -9 \end{pmatrix} \text{ oder}$$

$$\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) \times \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

2.4 Matrizengleichungen

Löse folgende Gleichung:

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + 4 \cdot X = 2 \cdot X + \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$4 \cdot X - 2 \cdot X = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2 \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \mid : 2$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Anwendung der Matrizenrechnung

Nach dieser Einführung wenden wir uns der Anwendung von Matrizen zu.

3.1 Einstufige Prozessen mit Matrizenrechnung

Die SV eröffnet ein Schülercafé. Damit der Kaffee immer gleich schmeckt, entwickeln sie folgende Rezepte:

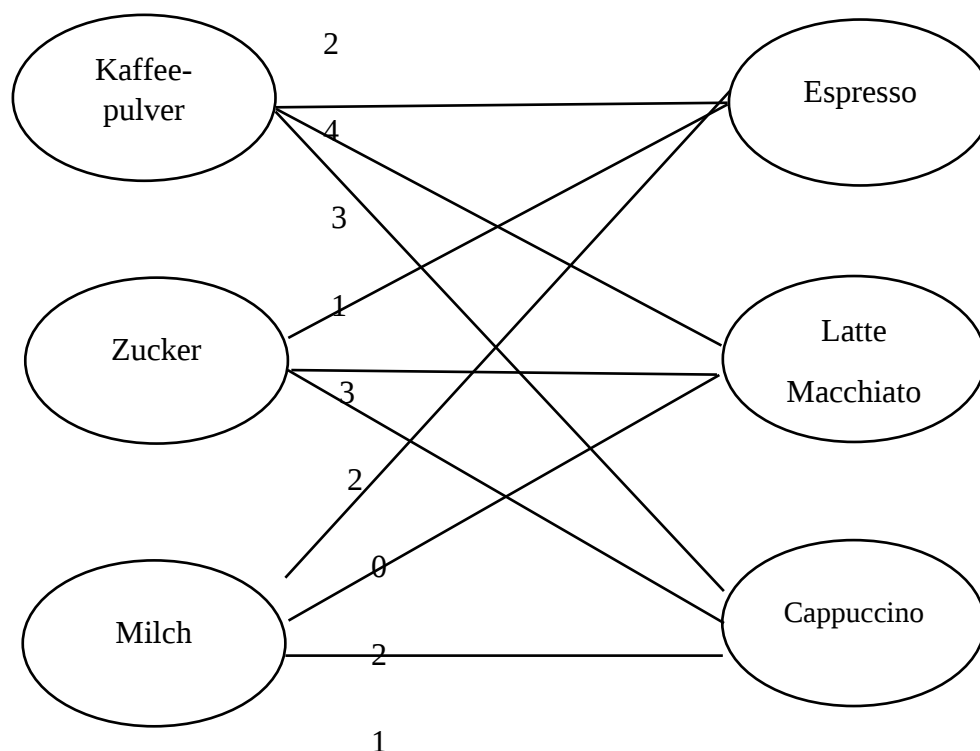
Für Espresso braucht man 2 Einheiten Kaffeepulver, 1 Einheit Zucker und keine Milch.

Für Latte Macchiato nehmen sie 4 Einheiten Kaffeepulver, 3 Einheiten Zucker und 2 Einheiten Milch.

Cappuccino verwenden sie 3 Einheiten Kaffeepulver, 2 Einheiten Zucker und eine Einheit Milch.

Anmerkung: Um nicht mühsam uns mit Maßeinheiten beschäftigen zu müssen, arbeiten wir mit „Einheiten“. Erst am Ende der Rechnung können wir dann die Einheiten in Liter, Gramm, etc. umrechnen.

Diese Verhältnisse können wir in einem **Gozintographen** darstellen:



Diese Verhältnisse könnten wir auch in eine Tabelle schreiben:

		Produkte		
Zutaten		Espresso	Latte Macchiato	Cappuccino
	Kaffeepulver	2	4	3
	Zucker	1	3	2
	Milch	0	2	1

Eine weitere Darstellungsform, mit der wir auch rechnen können, stellt die Matrizen Schreibweise

dar.

$$M := \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir einigen uns darauf, dass in den Spalten immer die Produkte und in den Zeilen immer die Zutaten stehen.

Die SV möchte am Schulfest Kaffee anbieten. Sie gehen davon aus, dass sie 20 Espresso, 40 Latte Macchiato und 60 Cappuccino verkaufen werden. Dafür berechnen sie nun eine Einkaufsliste:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 40 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 20 + 4 \cdot 40 + 3 \cdot 60 \\ 1 \cdot 20 + 3 \cdot 40 + 2 \cdot 60 \\ 0 \cdot 20 + 2 \cdot 40 + 1 \cdot 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 380 \\ 260 \\ 140 \end{pmatrix}$$

Die SV benötigt also 380 Einheiten Kaffee, 260 Einheiten Milch und 100 Einheiten Zucker. Für den Einkauf müssen sie noch die Einheiten in ordentliche Mengenangaben umrechnen, z.B. eine Einheit Kaffee entsprechen 10 Gramm.

Erweitern wir die Matrix auf mehrere Tage und stellen den Bedarf fest:

Montag: $\begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 14 \end{pmatrix}$

Mittwoch: $\begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

Freitag: $\begin{pmatrix} 15 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$

Das ergibt folgende Rechnung:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 & 10 & 15 \\ 10 & 5 & 10 \\ 14 & 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 122 & 58 & 73 \\ 78 & 37 & 47 \\ 34 & 16 & 21 \end{pmatrix}.$$

Wir haben nun eine Matrix, aus der wir den Tagesbedarf an Zutaten ablesen können. Beispiel:

Montag brauche ich 122 Einheiten Kaffee. Dienstag 37 Einheiten Zucker und 16 Einheiten Milch.

Den Wocheneinkauf ermittelt man leicht, indem man mit dem Vektor: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ multipliziert:

$$\begin{pmatrix} 122 & 58 & 73 \\ 78 & 37 & 47 \\ 34 & 16 & 21 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 253 \\ 162 \\ 71 \end{pmatrix}$$

Also für eine Woche benötigt man 253 Einheiten Kaffee, 162 Einheiten Zucker und 71 Einheiten Milch.

2. Beispiel

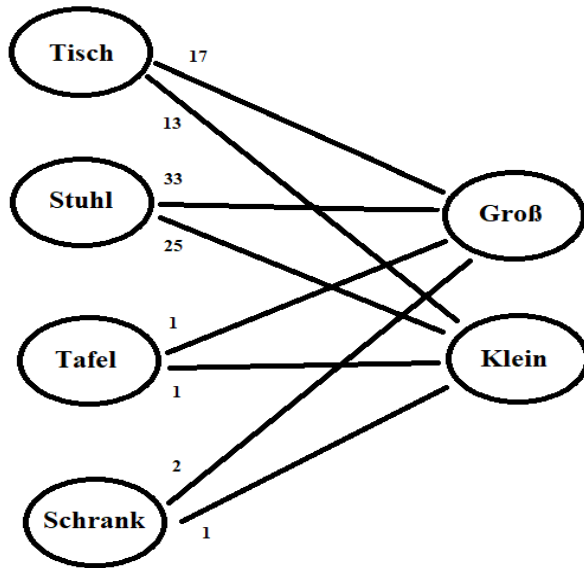
Eine Schule möchte ihre Räume neu ausstatten. Für einen großen Klassenraum benötigen sie 17 Tische, 33 Stühle, eine Tafel/Smartboard und zwei Schränke. In einem kleinem sind es nur 13 Tische, 25 Stühle, die Tafel und ein Schrank.

Aufgabe:

- Erstelle dafür einen Gozintographen, eine Tabelle und die zugehörige Matrix.
- Die Schule möchte 20 große und 10 kleine Räume ausstatten. Wie viele Möbelstücke muss die Schule einkaufen?
- Ein Tisch kostet 90€, ein Stuhl 70€, eine Tafel 660€ und die Schränke kosten 820€. Wie teuer wird die neue Ausstattung?

Lösung:

a) Der Gozintograph würde wie folgt aussehen:



Dies können wir aber auch in einer Tabelle darstellen:

Produkt	Anzahl großer Raum	Anzahl kleiner Raum
Tisch	17	13
Stuhl	33	25
Tafel	1	1
Schrank	2	1

Die Matrix dafür würde wie folgt aussehen: $\begin{pmatrix} 17 & 13 \\ 33 & 25 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

b) 20 große Räume und 10 kleine Räume entspricht folgendem Vektor: $\begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix}$

Der Bedarf an Möbeln lässt sich dann durch folgende Rechnung bestimmen:

$$\begin{pmatrix} 17 & 13 \\ 33 & 25 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 470 \\ 910 \\ 30 \\ 50 \end{pmatrix}$$

Die Schule muss also 470 Tische, 910 Stühle, 30 Tafeln und 50 Schränke bestellen.

c) Die Matrix für die Kosten würde wie folgt aussehen:

Kosten: (90 70 660 820)

Die entsprechende Rechnung wäre: $(90 \ 70 \ 660 \ 820) \cdot \begin{pmatrix} 470 \\ 910 \\ 30 \\ 50 \end{pmatrix} = (166800)$

Die Schule muss also mit Kosten von 166800€ rechnen.

Aufgabe: Das Eisgrub möchte 10 hl Helles, 8 hl Weizen und ein 3 hl alkoholfreies Bier herstellen. Die Rezeptur für einen hl sieht folgendermaßen aus:

Helles: 4 Einheiten Getreide, 3 Einheiten Wasser und 2 Einheiten Hopfen

Weizen: 3 Einheiten Getreide, 2 Einheiten Wasser und 1 Einheiten Hopfen

Alkoholfreies: 5 Einheiten Getreide, 4 Einheiten Wasser und 3 Einheiten Hopfen

Erstelle einen Gozintographen, eine Tabelle und eine Matrix. Berechne anschließend den Bedarf.

Aufgabe: N'ice in der Neustadt stellt Milcheis und Fruchteis her. Dafür brauchen sie Frucht bzw. Aroma, Milch und Zucker. Interpretiere folgende Matrix im Sachzusammenhang

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

3.2. Zweistufige Prozesse mit Matrizenrechnung

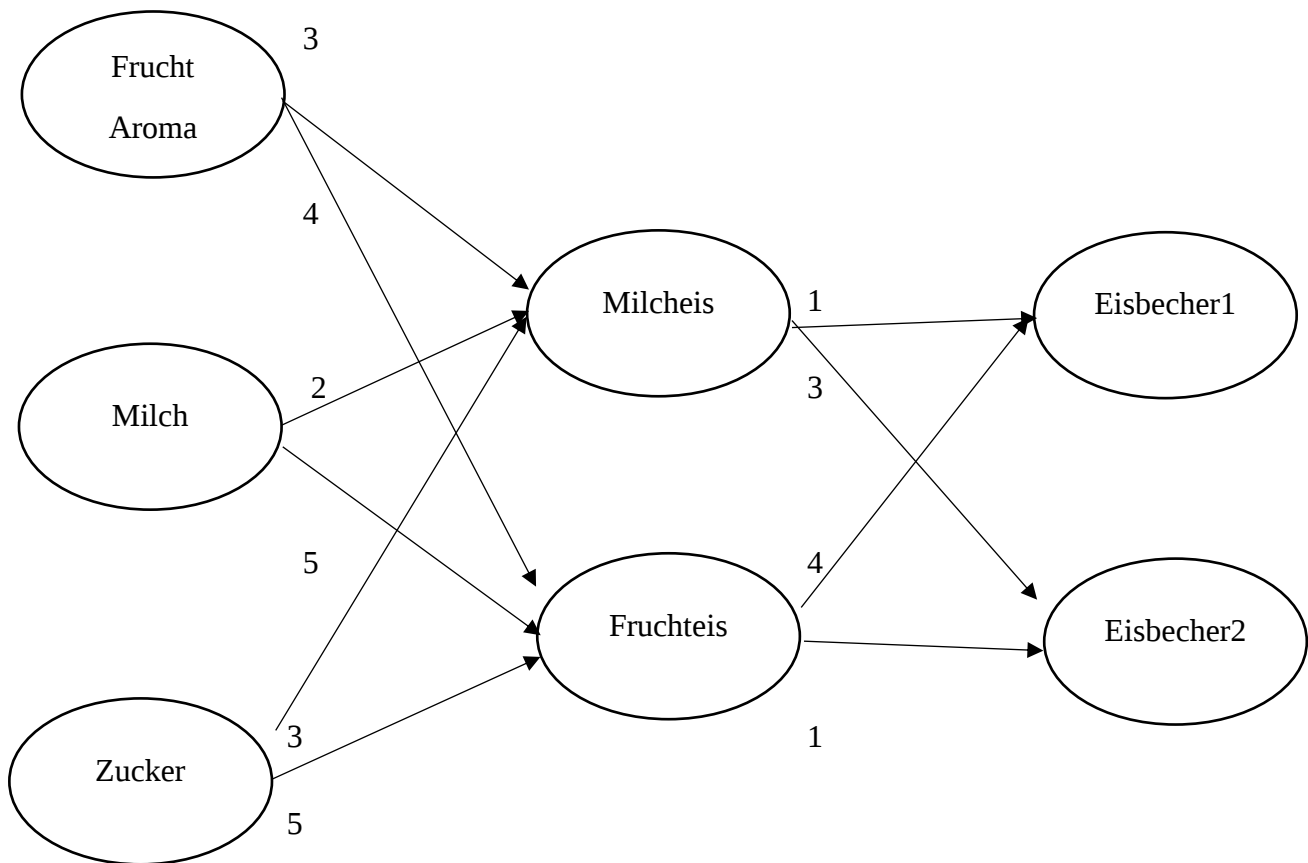
Bisher haben wir aus Zutaten Produkte hergestellt und hierfür die Einkaufsliste erstellt. Nun kann es aber auch sein, dass man zunächst einmal Zwischenprodukte und daraus dann Endprodukte herstellen möchte. Wie kann man hierfür den Bedarf ausrechnen?

Ausgangsprodukte ==> Zwischenprodukte ==> Endprodukte

Prozess A

Prozess B

Bleiben wir bei unserem Eisgeschäft. Aus den obigen Eissorten Milch- und Fruchteis bietet N'ice zwei unterschiedliche Eisbecher an.



Möchte man hier wissen, wie viele Zutaten man für die jeweiligen Endprodukte braucht, muss man zwei Matrizen erstellen und diese multiplizieren. Für die Zwischenprodukte ergibt sich:

	Zwischenprodukte Eissorten		
		Milcheis	Fruchteis
	Frucht	3	4
	Milch	2	5
	Zucker	3	5

Und damit folgende Bedarfsmatrix: $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

Für die Eisbecher ergibt sich:

	Endprodukte Eisbecher		
Eissorten		Eisbecher 1	Eisbecher 2
	Milcheis	1	3
	Fruchteis	4	1

Beide Matrizen werden nun multipliziert und es entsteht eine „gemeinsame“ Bedarfsmatrix:

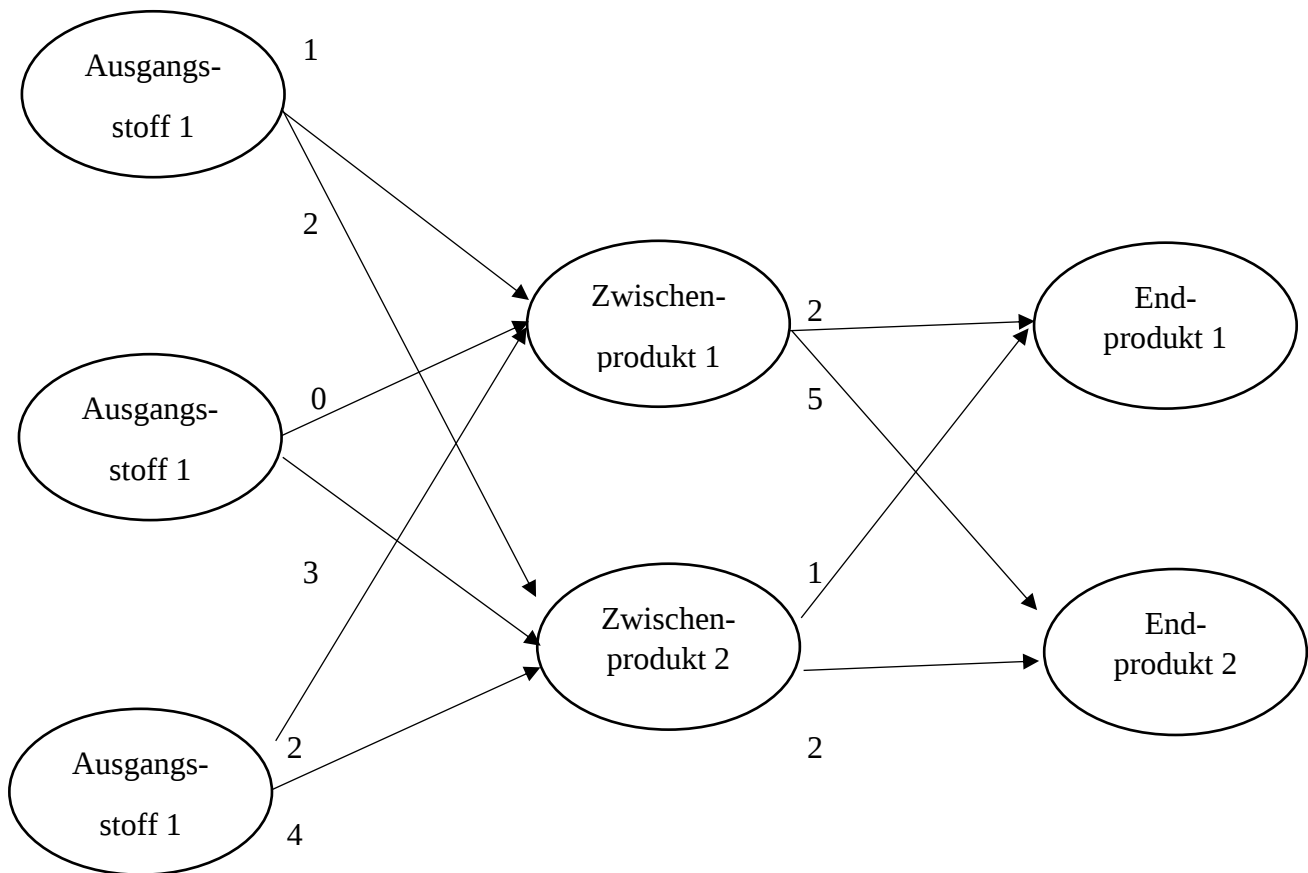
$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 13 \\ 22 & 11 \\ 23 & 14 \end{pmatrix}$$

Der Wetterbericht verkündet einen sonnigen Sonntag. Erfahrungsgemäß werden dann ca. 100 Eisbecher Nr. 1 und ca. 80 Eisbecher Nr. 2 verkauft. Wie viele Zutaten muss man vorrätig haben?

$$\begin{pmatrix} 19 & 13 \\ 22 & 11 \\ 23 & 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2940 \\ 3080 \\ 3420 \end{pmatrix}$$

Man benötigt 2940 Einheiten Fruchtaroma, 3080 Einheiten Milch und 3420 Einheiten Zucker.

Eine Firma stellt aus Zwischenprodukten Endprodukte her. Der Produktionsverlauf wird durch folgenden Gozintographen dargestellt:



4. Inverse Matrizen

Vorweg führen wir den Begriff der Einheitsmatrix ein:

Definition: Einheitsmatrix

Eine quadratische $n \times n$ Matrix $E_n = (e_{ij})$ heißt Einheitsmatrix, wenn für ihre Elemente e_{ij} gilt:

$$e_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j \\ 0, & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} n \text{ Zeilen} \\ n \text{ Spalten} \end{matrix}$$

E_n : Wenn die Anzahl n der Zeilen und Spalten bekannt ist, schreibt man auch oft E statt E_n

Mit anderen Worten:

Matrizen mit nur 1-ern auf der Diagonalen und sonst nur 0 als Eintrag, nennen wir Einheitsmatrix.

$$\text{Beispiele: } E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ oder } E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für alle quadratischen $n \times n$ – Matrizen A gilt: $A \times E_n = E_n \times A = A$. Multipliziert man also an eine Matrix die Einheitsmatrix, erhält man wieder die Matrix. Dies kennen wir ja auch von den natürlichen Zahlen: $3 \cdot 1 = 1 \cdot 3 = 3$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Definition Inverse Matrix

Zwei quadratische $n \times n$ – Matrizen A und B mit $A \times B = B \times A = E$ heißen invers zueinander.

Die zu einer Matrix A inverse Matrix wird oft mit A^{-1} bezeichnet.

Mit anderen Worten:

Als inverse Matrix zu A bezeichnen wir diejenige Matrix A^{-1} für die gilt:

$$A \cdot A^{-1} = E$$

Auch dies kennen wir von den natürlichen Zahlen. Hier ist $\frac{1}{2}$ das inverse Element zu 2, denn es gilt:
 $2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$

Beispiel

Für $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -5 & 2 & 4 \\ -2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ ist $A^{-1} = \begin{pmatrix} 16 & -1 & 10 \\ 2 & 0 & 1 \\ 19 & -1 & 12 \end{pmatrix}$ die inverse Matrix, denn es gilt:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -5 & 2 & 4 \\ -2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 16 & -1 & 10 \\ 2 & 0 & 1 \\ 19 & -1 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ bzw.}$$

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 16 & -1 & 10 \\ 2 & 0 & 1 \\ 19 & -1 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -5 & 2 & 4 \\ -2 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rechenweg, um die inverse Matrix zu bestimmen:

Vorbemerkung: Nicht jede Matrix hat eine inverse Matrix. Wichtig ist, dass die Matrix quadratisch ist, also genau so viele Zeilen wie Spalten ($m = n$) besitzt.

Lösen mithilfe eines LGS:

Mit der Gleichung $A \cdot A^{-1} = E$ kann auch die inverse Matrix A^{-1} bestimmt werden.

Beispiel:

$$\text{Ansatz: } \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot A^{-1} = E$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aus der Multiplikation der obigen Gleichung erhält man:

$$\begin{pmatrix} 3a_{11} + 0a_{21} & 3a_{12} + 0a_{22} \\ 2a_{11} + a_{21} & 2a_{12} + a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ bzw.: } \begin{pmatrix} 3a_{11} & 3a_{12} \\ 2a_{11} + a_{21} & 2a_{12} + a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vergleich der Matrizeneinträge ergibt:

$$\begin{aligned} 3a_{11} &= 1 & 3a_{12} &= 0 \\ 2a_{11} + a_{21} &= 0 & 2a_{12} + a_{22} &= 1 \end{aligned}$$

Diese Matrizengleichung ergibt zwei Gleichungssysteme mit je zwei Unbekannten:

Erstes LGS: I $3a_{11} = 1$ II $2a_{11} + a_{21} = 0$ Löst man diese, so erhält man: $a_{11} = \frac{1}{3}$; $a_{21} = -\frac{2}{3}$	Zweites LGS: I $3a_{12} = 0$ II $2a_{12} + a_{22} = 1$ Löst man diese, so erhält man: $a_{12} = 0$ und $a_{22} = 1$
---	--

Damit ergibt sich die inverse Matrix $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$.

Probe: $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot (-\frac{2}{3}) & 0 \cdot 3 + 1 \cdot 0 \\ 2 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot (-\frac{2}{3}) & 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Lösen mithilfe des Gauss-Jordan-Verfahren:

Für größere Matrizen bietet sich folgender Rechenweg mit dem Gauss-Jordan-Verfahren an:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \text{ Durch Umformen versucht man diese beiden Gleichungssysteme in folgende}$$

Form zu bringen:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -5 & 2 \end{array} \right) \text{ Also die linke Matrix soll zur Einheitsmatrix umgeformt werden.}$$

Dann gilt, dass die $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 3 & -1 \\ 7 & -5 & 2 \end{pmatrix}$ die inverse Matrix zu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ ist.

Zeigen wir die Umformungen ausführlich:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 3 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{matrix} \cdot 12 \\ \cdot (-4) \\ \cdot (-3) \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 & | & 12 & 0 & 0 \\ -12 & -8 & -4 & | & 0 & -4 & 0 \\ -12 & -15 & -9 & | & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ I + II \\ I + III \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 & | & 12 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -4 & | & 12 & -4 & 0 \\ 0 & -15 & -9 & | & 12 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} :4 \\ :4 \\ :3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & | & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & | & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & -3 & | & 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{matrix} \cdot 5 \\ \cdot (-2) \\ \cdot (-2) \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & | & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & -5 & | & 15 & -5 & 0 \\ 0 & 10 & 6 & | & -8 & 0 & 2 \end{pmatrix} II + III$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & | & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & -5 & | & 15 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 7 & -5 & 2 \end{pmatrix} :5$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & | & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & | & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 7 & -5 & 2 \end{pmatrix} II + III$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & | & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & | & 10 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 7 & -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} :3 \\ :(-2) \\ \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -5 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 7 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Damit gilt, dass die inverse Matrix $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 3 & -1 \\ 7 & -5 & 2 \end{pmatrix}$ ist.

Die Probe $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 3 & -1 \\ 7 & -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ kann man leicht nachrechnen.

Wie schon erwähnt, muss eine Matrix quadratisch sein, damit sie eine inverse Matrix besitzt.

Selbst dann ist aber nicht garantiert, dass die Matrix eine inverse Matrix hat:

So hat die Nullmatrix $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ keine inverse Matrix, da gilt: $O \cdot B = O \neq E_2$ bzw.

$$B \cdot O = O \neq E_2$$

Auch zur Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ gibt es keine inverse Matrix A^{-1} . Denn für jede Matrix

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ ergibt sich das folgende Produkt: } A \cdot B = \begin{pmatrix} 2a + 6c & 2b + 6d \\ a + 3c & b + 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Das bring uns zum ersten LGS

$$\text{I} \quad 2a + 6c = 1$$

$$\text{II} \quad a + 3c = 0 \Rightarrow a = -3c$$

$$a \text{ in I eingesetzt: } 2(-3c) + 6c = 1$$

$$-6c + 6c = 1$$

$$0 = 1$$

Das LGS ist also nicht lösbar und somit hat die Matrix A keine inverse Matrix.

Ob eine Matrix invertierbar ist, kann man mit der sogenannten Determinante bestimmen.

Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ Dann berechnet sich die Determinante folgendermaßen:

$$D = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Es gilt: Eine Matrix ist invertierbar, wenn die Matrix D ungleich Null ist.

Beispiel:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ Dann berechnet sich die Determinante folgendermaßen:

$$D = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2$$

Bei einer 3 x 3 Matrix errechnet sich die Matrix folgendermaßen:

Für eine 3 x 3-Matrix A mit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ gilt:

$$D = a_{11} \cdot (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12} \cdot (a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13} \cdot (a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}).$$

(Einträge der ersten Zeile festhalten und die Einträge der 2. und 3. Zeile multiplizieren bzw. subtrahieren. Beachte besonders den Mittelteil!)

Auch hier gilt: Damit eine Matrix **invertierbar** ist, muss gelten: $D \neq 0$.

Beispiel: Berechne die Determinante der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ 9 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \text{Lösung: } D &= 1 \cdot (2 \cdot 1 - 0 \cdot 1) + 6 \cdot (0 \cdot 9 - 4 \cdot 1) + 2 \cdot (4 \cdot 1 - 2 \cdot 9) \\ &= 1 \cdot 2 \cdot 1 + 6 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 4 \cdot 1 - 9 \cdot 2 \cdot 2 - 1 \cdot 0 \cdot 1 - 1 \cdot 4 \cdot 6 \\ &= 2 - 24 - 28 = -50 \end{aligned}$$

Diese Rechnung kann man sich folgendermaßen veranschaulichen:

Berechne die Determinante der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ 9 & 1 & 1 \end{pmatrix}$



$$\begin{aligned} \text{Lösung: } D &= 1 \cdot (2 \cdot 1 - 0 \cdot 1) + 6 \cdot (0 \cdot 9 - 4 \cdot 1) + 2 \cdot (4 \cdot 1 - 2 \cdot 9) \\ &= \underline{1 \cdot 2 \cdot 1} + \underline{6 \cdot 0 \cdot 0} + \underline{2 \cdot 4 \cdot 1} - \underline{9 \cdot 2 \cdot 2} - \underline{1 \cdot 0 \cdot 1} - \underline{1 \cdot 4 \cdot 6} \\ &= 2 - 24 - 28 = -50 \end{aligned}$$

Umkehrung der Prozesse

Nun stellen wir uns die umgekehrte Frage: Nicht wie viele Zutaten brauche ich für eine bestimmte Anzahl von Endprodukten, sondern wie viele Produkte kann ich aus einer bestimmten Anzahl Zutaten herstellen. Für diese Umkehrung brauche ich die inverse Matrix.

Braumeister Fritz benötigt für sein seine Biersorten: Pils, Export und Alkoholfreies Bier

Folgende Zutaten Getreide, Hopfen und Hefe.

Er hat folgende Bedarfsmatrix aufgestellt: $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Im Lager findet er 2575 Einheiten Getreide, 1470 Einheiten Hopfen und 906 Einheiten Hefe. Er möchte den Lagerbestand aufbrauchen. Wie viel Bier kann er nun jeweils von jeder Sorte brauen?

Um dies zu beantworten, braucht man die inverse Matrix zu A, also A^{-1} . An diese inverse Matrix multipliziere ich den Vektor mit meinen Zutatenmengen. Das Ergebnis gibt dann an, wie viel Produkte ich aus den Zutaten herstellen kann.

Die inverse Matrix bestimmt mit dem GTR: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 8 & -10 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -6 & 7 \end{pmatrix}$.

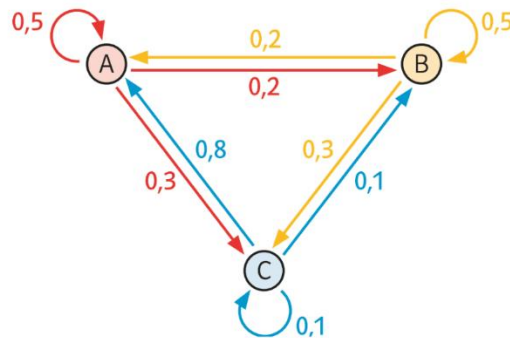
$$\begin{pmatrix} -1 & 8 & -10 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -6 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2575 \\ 1470 \\ 906 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 125 \\ 342 \\ 97 \end{pmatrix}$$

Er kann also 125 Einheiten Pils, 342 Einheiten Export, und 97 Einheiten alkoholfreies Bier brauen.

5. Stochastische Prozesse

In einem Wildreservat leben 2400 Tiere, von denen jedes täglich eine der drei Tränken A, B, oder C besucht. Das Verhalten der Tiere lässt sich durch folgendes Diagramm beschreiben:

(Alle Angaben in Prozent.)



Betrachten wir einmal Tränke A: 50% kommen am nächsten Tag wieder zu Tränke A. 20% gehen am nächsten Tag zur Tränke B. Von Tränke C zur Tränke A gehen 80%.

Halten wir auch diesen Sachverhalt zunächst in einer Tabelle fest:

		„von“		
		A	B	C
„nach“	A	0,5	0,2	0,8
	B	0,2	0,5	0,1
	C	0,3	0,3	0,1

Interpretation: Von A nach B gehen 20 Prozent. Von B nach C gehen 30 Prozent.

$$P = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,2 & 0,8 \\ 0,2 & 0,5 & 0,1 \\ 0,3 & 0,3 & 0,1 \end{pmatrix}$$

Begriffe:

Da die Anzahl der Tiere gleichbleibt und diese nur wechseln, sprechen wir von einem Austauschprozess und die zugehörige Matrix nennen wir Übergangsmatrix. Man könnte die Einträge auch als Angaben von Wahrscheinlichkeiten interpretieren. Also mit einer Wahrscheinlichkeit von 50% geht ein Tier am nächsten Tag wieder zur Tränke A. Die Gesamtsumme jeder Spalte ergänzt sich zu 1 (100%). Daher sprechen wir hier von einer stochastischen Matrix.

Ein Wildhüter stellt an einem Tag fest, dass von den 2400 Tieren 900 bei Tränke A waren, 1000 bei Tränke B und 500 bei Tränke C.

Welche Verteilung bzw. welche Anzahl von Tieren ist am nächsten Tag an der Tränke zu erwarten?

$$P = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,2 & 0,8 \\ 0,2 & 0,5 & 0,1 \\ 0,3 & 0,3 & 0,1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 900 \\ 1000 \\ 500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1050 \\ 730 \\ 620 \end{pmatrix}.$$

Bei Tränke A werden es 1050 Tiere sein und bei Tränke B 730 und bei Tränke C 620.

Rechnen wir noch einmal für den nächsten Tag:

$$\begin{pmatrix} 0,5 & 0,2 & 0,8 \\ 0,2 & 0,5 & 0,1 \\ 0,3 & 0,3 & 0,1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1050 \\ 730 \\ 620 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1167 \\ 637 \\ 596 \end{pmatrix}.$$

Wenn wir das nun sehr häufig berechnen, stellen wir fest, dass die Verteilung sich irgendwann stabilisiert:

So erhalten wir nach ca. 20 Tagen folgende **stabile (Grenz-)Verteilung** $\bar{g} = \begin{pmatrix} 1200 \\ 600 \\ 600 \end{pmatrix}$

Diese Verteilung wird auch **Gleichgewichtsverteilung** genannt.

Ein anderer Rechenweg besteht darin, die Übergangsmatrix P sehr häufig mit sich selbst zu multiplizieren P^k mit k gegen ∞ .

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,2 & 0,8 \\ 0,2 & 0,5 & 0,1 \\ 0,3 & 0,3 & 0,1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,5 & 0,2 & 0,8 \\ 0,2 & 0,5 & 0,1 \\ 0,3 & 0,3 & 0,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,53 & 0,44 & 0,5 \\ 0,23 & 0,32 & 0,22 \\ 0,24 & 0,24 & 0,28 \end{pmatrix}$$

Machen wir dies öfter, erhalten wir irgendwann folgende stabile Matrix:

$$\begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0,25 & 0,25 & 0,25 \\ 0,25 & 0,25 & 0,25 \end{pmatrix}$$

Also

$$\begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0,25 & 0,25 & 0,25 \\ 0,25 & 0,25 & 0,25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 800 \\ 1000 \\ 600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1200 \\ 600 \\ 600 \end{pmatrix}$$

Langfristig pendelt es sich also ein, dass 1200 Tiere die Tränke A, und jeweils 600 Tiere die Tränken B und C besuchen.

Da man im GTR auch recht einfach P^{10} berechnen kann, ist die zweite Methode schneller.

Den Vektor $\begin{pmatrix} 1200 \\ 600 \\ 600 \end{pmatrix}$ bezeichnen wir als Fixvektor, da er bei der Multiplikation mit der Grenzmatrix nicht mehr verändert wird.

$$\begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0,25 & 0,25 & 0,25 \\ 0,25 & 0,25 & 0,25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1200 \\ 600 \\ 600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1200 \\ 600 \\ 600 \end{pmatrix}$$

Dabei gilt, dass der Fixvektor nicht eindeutig ist. Jedes Vielfache $\begin{pmatrix} 2400 \\ 1200 \\ 1200 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} 3600 \\ 1800 \\ 1800 \end{pmatrix} \dots$ ist ebenfalls ein Fixvektor zur Grenzmatrix.

Mit diesem Fixvektor kann man die Grenzmatrix auch berechnen.

Nehmen wir noch einmal die obige Matrix $\begin{pmatrix} 0,5 & 0,2 & 0,8 \\ 0,2 & 0,5 & 0,1 \\ 0,3 & 0,3 & 0,1 \end{pmatrix}$. Aus dieser Matrix wollen wir eine Grenzmatrix berechnen, die den Fixvektor nicht mehr verändert. Es soll also gelten:

$$\begin{pmatrix} 0,5 & 0,2 & 0,8 \\ 0,2 & 0,5 & 0,1 \\ 0,3 & 0,3 & 0,1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Dies führt zu folgendem Gleichungssystem:

$$0,5x + 0,2y + 0,8z = x \quad | -x \quad \Rightarrow \quad -0,5x + 0,2y + 0,8z = 0$$

$$0,2x + 0,5y + 0,1z = y \quad | -y \quad \Rightarrow \quad 0,2x - 0,5y + 0,1z = 0$$

$$0,3x + 0,3y + 0,1z = z \quad | -z \quad \Rightarrow \quad 0,3x + 0,3y - 0,9z = 0$$

Berechnet man dieses LGS, so erhält man den Fixvektor $\bar{g} = \begin{pmatrix} 2s \\ 1s \\ 1s \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Zur Erinnerung: Fixvektoren sind nicht eindeutig, auch alle Vielfachen sind Fixvektoren.

Hat man nun einen Anfangsbestand von 3200 Tieren, so erhält man die Verteilung durch folgende Rechnung:

$x + y + z = 3200 \Rightarrow 2s + s + s = 3200 \Rightarrow 4s = 3200$ und damit $s = 800$. Somit gilt für die langfristige Verteilung: $800 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 1600 \\ 800 \\ 800 \end{pmatrix}$.

Klammert man so aus, dass die Summe im Vektor 1 ergibt, so entsprechen die Elemente dieses Fixvektors den Elementen der Grenzmatrix:

$$\bar{g} = \begin{pmatrix} 1600 \\ 800 \\ 800 \end{pmatrix} = 3200 \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,25 \\ 0,25 \end{pmatrix} \text{ und damit die Grenzmatrix: } G = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0,25 & 0,25 & 0,25 \\ 0,25 & 0,25 & 0,25 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix nennt man auch eine stochastische Matrix.

Definition: Eine Matrix P heißt **stochastische Matrix**, wenn gilt:

- Sie ist quadratisch
- Für jedes ihrer Elemente a_{ij} gilt: $0 \leq a_{ij} \leq 1$
- Die Summe der Elemente in jeder Spalte beträgt 1

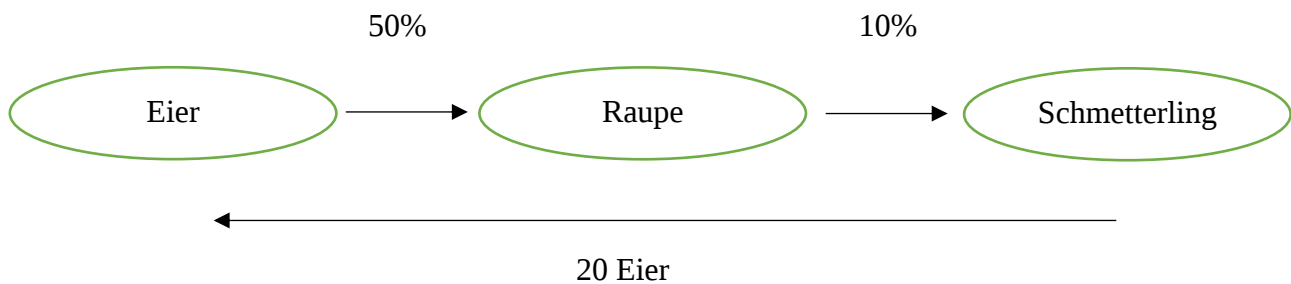
Der zu einer stochastischen Matrix gehörende Prozess heißt **Austauschprozess**.

Satz (ohne Beweis) zur Existenz einer Grenzmatrix:

P sei eine stochastische Matrix. Wenn es unter den Matrizen $P, P^2, P^3, \dots$ eine Matrix mit mindestens einer Zeile gibt, in der alle Elemente positiv sind, dann besitzt der Austauschprozess eine Stabile Verteilung $\bar{g}$ und ihre Grenzmatrix G , deren Spalten alle gleich sind.

6. Populationsentwicklung – Zyklische Prozesse

In einem Waldgebiet wird das Populationsverhalten einer bestimmten Schmetterlingsart untersucht. Dabei stellt man fest:



Die entsprechende Übergangsmatrix lautet: $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0 \end{pmatrix}$

Im ersten Monat stellt man fest, dass 300 Eier, 40 Raupen und 12 Schmetterlinge im Waldstück vorhanden sind. Dies führt zu folgendem Startvektor: $S = \begin{pmatrix} 300 \\ 40 \\ 12 \end{pmatrix}$.

Für den 1. Monat ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 300 \\ 40 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 240 \\ 150 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Im 2. Monat:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 240 \\ 150 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \\ 120 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Im 3. Monat

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 80 \\ 120 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 40 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Im 4. Monat:

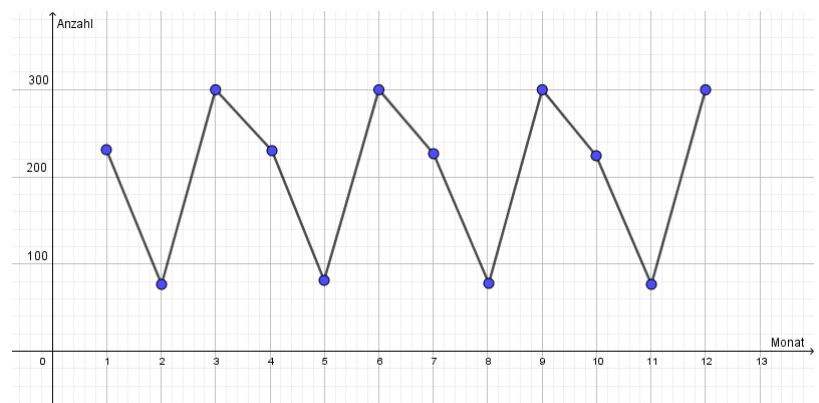
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 300 \\ 40 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 240 \\ 150 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Man stellt also fest, dass sich die Population zyklisch entwickelt.

Eine Matrix heißt zyklisch, wenn es ein n aus den natürlichen Zahlen gibt, so dass gilt:

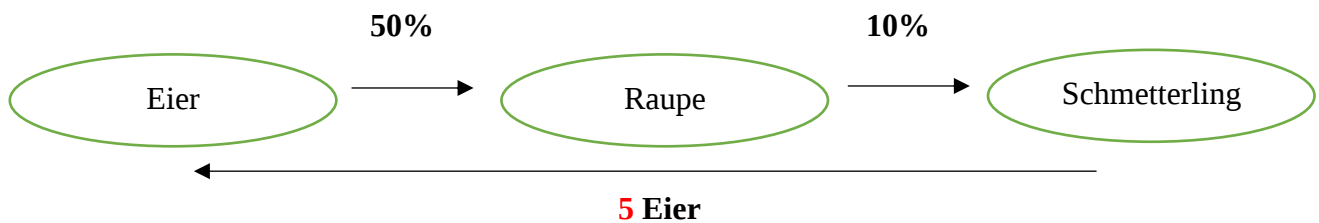
	Eier	Raupe	Larve
Monat	240	150	4
Monat	80	120	15
Monat	300	40	12
Monat	240	150	4

Anzahl der Eier:



$$A^n = E.$$

Aber natürlich muss das Wachstum nicht immer zyklisch ablaufen. Stört man z.B. die Populationsentwicklung, indem man ein Gift einsetzt, stirbt die Population aus. Nehmen wir an, dass der Förster ein Gift einsetzt, um die Eiablage pro Schmetterling zu hemmen. Dann würde ein Schmetterling statt 20 Eier nur noch 5 Eier ablegen. Dies führt zu folgendem Schaubild:



Die neue Übergangsmatrix lautet: $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0 \end{pmatrix}$

Im ersten Monat stellt man fest, dass 300 Eier, 40 Raupen und 12 Schmetterlinge im Waldstück vorhanden sind. Dies führt zu folgendem Startvektor: $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 300 \\ 40 \\ 12 \end{pmatrix}$

Für den 1. Monat ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 300 \\ 40 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 150 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Für den 2. Monat ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 60 \\ 150 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Für den 3. Monat ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 75 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Für den 6. Monat ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 7.5 \\ 3.75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18.75 \\ 2.5 \\ 0.75 \end{pmatrix}$$

Für den 10. Monat ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4.69 \\ 0.63 \\ 0.19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.94 \\ 2.34 \\ 0.06 \end{pmatrix}$$

Rechnerisch kommen wir nicht ganz auf Null, aber wir sehen, dass die Population ausstirbt.

Die Population stirbt aus, da $5 \cdot 0.5 \cdot 0.1 < 1$.

Umgekehrt kann eine Population auch stark anwachsen.

Durch eine Mutation eines Vorgängers der Schmetterlinge ist die Nachfolgeneration deutlich fruchtbarer und legt nun 30 Eier. Wie entwickelt sich die Population in 10 Monaten?

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 30 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} 300 \\ 40 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

	Eier	Raupe	Larve
Monat	360	150	4
Monat	120	180	15
Monat	450	60	18
Monat	540	225	6

Untersucht man einen Prozess dieser Art mit der Übergangsmatrix $U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & v \\ a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}$, wobei v die

Vermehrungsrate und a und b jeweils Überlebensraten sind, so erhält man

$$U^3 = \begin{pmatrix} a \cdot b \cdot v & 0 & 0 \\ 0 & a \cdot b \cdot v & 0 \\ 0 & 0 & a \cdot b \cdot v \end{pmatrix}$$

Zeigen wir dies ausführlich:

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & v \\ a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}$$

$$U^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & v \\ a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & v \\ a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \cdot v & 0 \\ 0 & 0 & a \cdot v \\ a \cdot b & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$U^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & v \\ a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & v \\ a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & v \\ a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot b \cdot v & 0 & 0 \\ 0 & a \cdot b \cdot v & 0 \\ 0 & 0 & a \cdot b \cdot v \end{pmatrix}$$

Bei der zyklischen Entwicklung der Insekten-Population gilt: $A^3 = E$,

Nehmen wir die obige, zyklische Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0 \end{pmatrix}$, so gilt: $a \cdot b \cdot v = 0,5 \cdot 0,1 \cdot 20 = 1$

Ist für eine Populationsentwicklung eine Übergangsmatrix $U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & v \\ a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}$ mit der

Vermehrungsmenge $v > 0$ und den Überlebensraten a und b mit $0 < a, b \leq 1$ charakteristisch, dann gilt:

Wenn $\begin{cases} a \cdot b \cdot v < 1, \text{so stirbt die Population aus.} \\ a \cdot b \cdot v = 1, \text{so entwickelt sich die Population zyklisch.} \\ a \cdot b \cdot v > 1, \text{so nimmt die Population zu.} \end{cases}$

7. Literatur

Lambacher Schweitzer, Mathematik für Gymnasien, Leistungskurs